5

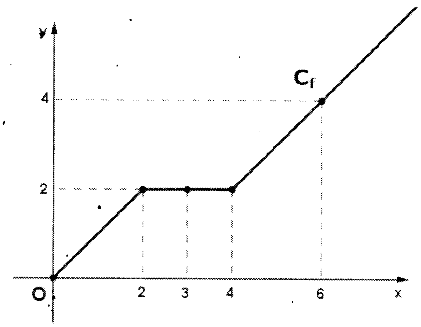
Α1. Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$.

Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ x \geq 0$$

όπου f είναι η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.
Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά τετράγωνα.



$F(0) = \square$, $F(2) = \square$, $F(3) = \square$, $F(4) = \square$, $F(6) = \square$.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{x\to\sigma_1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\sigma_2} f(x) = +\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

β. Η γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $(0, f(0))$.

γ. $|\eta\mu x| \geq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση.

ε. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{e}{e^x+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι

η f αντιστρέφεται

και να ορίσετε την αντίστροφή της f^{-1}.

Αν

$$h(x)=f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{e-x}{x}\right),\quad x\in(0,e),$$

τότε:

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα.

Β3. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β4. Να βρείτε της ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h και να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασή της.

Μονάδες (6+5+8+6)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-x^3, & \text{αν } x<0\\ x\cdot(\text{συν}x-1), & \text{αν } 0\le x\le \pi\end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε την f''.

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής, τα

$$O(0,0)\ \text{και}\ K(x_0,f(x_0)),$$

για τα οποία ισχύει $$(OK)=-2\text{εφ}x_0\sqrt{\text{συν}^2x_0-2\text{συν}x_0+2}.$$

Μονάδες (6+5+6+8)=25

ΘΕΜΑ Δ

Έστω ν θετικός ακέραιος, με $\nu \geq 2$ και η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x^{\nu}}{x^{\nu} + (2-x)^{\nu}}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $A = \mathbb{R}$.

Δ2.i. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(2-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$ ισούται με 1 τετραγωνική μονάδα.

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι f είναι η συνάρτηση που προκύπτει για $\nu = 2$

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ4. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(\eta\mu^2 x) + f(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) = f(e^x - x^2 + 1)$

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\int_0^2 x f'(x)\,dx}{x-1} + \frac{1 - \int_0^2 f(f(x))\,dx}{x-2} = 2022$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Μονάδες $[4+(4+4)+4+4+5]=25$