4

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$.

Πώς ορίζεται η σύνθεση της f με την g και πώς συμβολίζεται;

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ, μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. **Μονάδα 1**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα **α**. **Μονάδες 3**

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

β. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό.

γ. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

δ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ᾽ ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι οπωσδήποτε σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

ε. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με f' συνεχή στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)' = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{e^x}{x},\quad x\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f, αν υπάρχουν .

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^5+2x$ είναι 1-1 και ότι για κάθε $\alpha\in(e,+\infty)$ η εξίσωση

$$e^{5x}+2x^4e^x=x^5\alpha^5+2\alpha x^5$$

έχει 2 ακριβώς πραγματικές ρίζες.

Μονάδες (5+6+7+7)=25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν

- $f^2(x)-2xf(x)=1-\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Ο άξονας x′x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x-\sqrt{x^2-\eta\mu x+1},\quad x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=2x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και στη συνέχεια ότι η γραφική παράσταση της f έχει άπειρα κοινά σημεία με την ε και βρίσκεται, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία, κάτω από την ε.

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A(2x_0,0)$

Γ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sigma\upsilon\nu x\sqrt{x^2-\eta\mu x+1}\right)dx > \frac{\pi}{2}-1$$

Μονάδες (6+7+6+6)=25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή και επιπλέον, ισχύουν $f(2)=0$ και $f'(0)=3$.

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση g με

$$g(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι για κάθε $x>e$ ισχύει: $x^e<e^x$

Δ2.i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $g\circ f'$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g(x-e)}{(g\circ f')(x^e)-(g\circ f')(e^x)}$

Δ3. Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύει $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\ge\frac{3}{e}(x+1)+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma=e$.

Δ4.i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)\ge f'(2)(x-2)$

ii. Θεωρούμε σημείο $M(x,f(x))$ με $x>2$ στη γραφική παράσταση της f και το σημείο A(1, 0) του θετικού ημιάξονα Ox. Αν E(x) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΑ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0>2$ ώστε $E(x_0)=2022$ τετραγωνικές μονάδες.

Μονάδες [4+(4+4)+5+(3+5)]=25