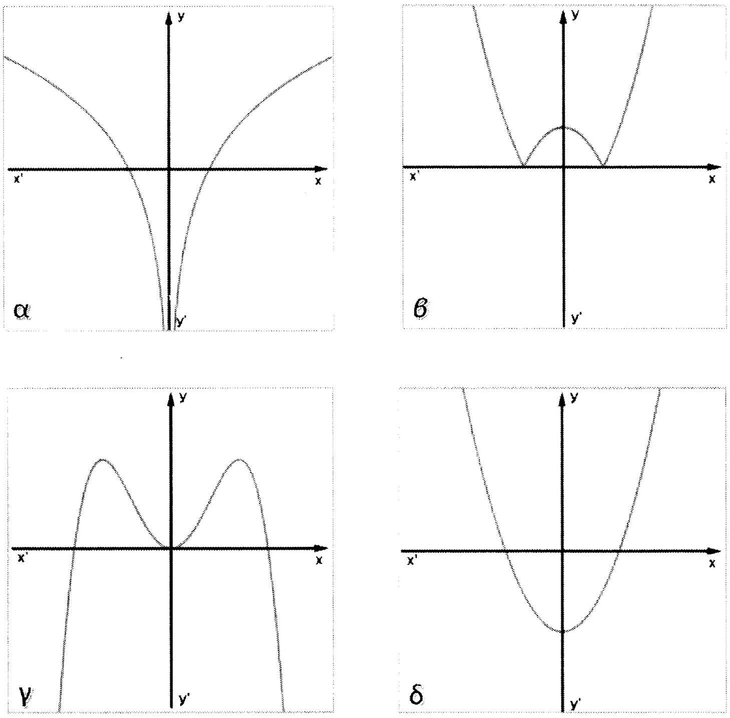
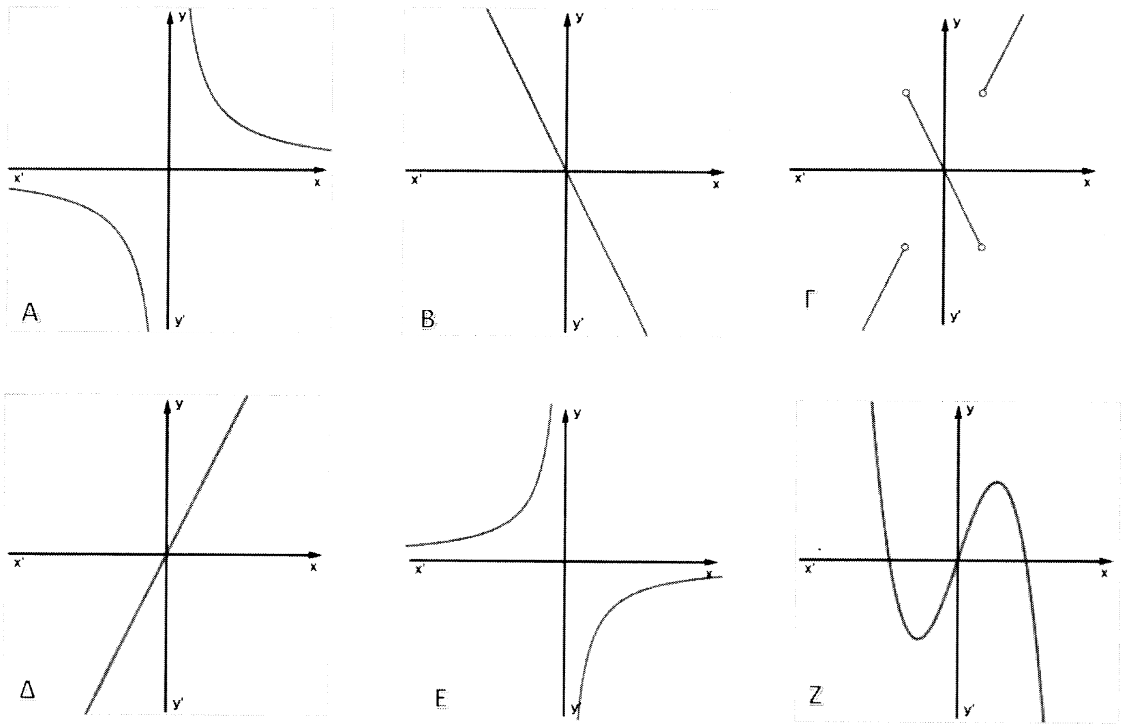
3

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων α, β, γ, δ σε εκείνη από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ και έστω $0<\alpha<\beta$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν διαστήματα, πλάτους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ το καθένα, τα $[\alpha,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, … , $[x_{\nu-1},\beta]$ και έστω $\xi_\kappa\in(x_{\kappa-1},x_\kappa)$ για κάθε $\kappa\in\{1,2,3,\ldots,\nu\}$. Τότε το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ ισούται με:

Α. $\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$, **Β.** $\ln\frac{\beta}{\alpha}$, **Γ.** $\beta-\alpha$, **Δ.** $\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}$

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

β. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα ακριβώς σημείο καμπής.

γ. $(\varepsilon\varphi x)'=1+\varepsilon\varphi^2 x$, με $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ. $\int_1^e \ln x\,dx=\int_e^1 \ln\frac{1}{t}\,dt$.

ε. Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, έχει παράγουσα στο Δ.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-\frac{2}{x},\ x\in\mathbb{R}^*.$$

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης C_f.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Β4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f, λαμβάνοντας υπόψιν σας τα προηγούμενα ερωτήματα.

Μονάδες (6+8+6+5)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty,\ -1]$, για την οποία ισχύει

$$f'(x)+e^{x-2}=\frac{1}{x-1},\quad \text{για κάθε } x>1.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(2)=-1$.

Γ2. Να δείξετε ότι

$$f(x)=\ln(x-1)-e^{x-2},\quad x\in(1,+\infty)$$

και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να λύσετε στο διάστημα $(1,\ +\infty)$ την εξίσωση

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}+\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}+\left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)}=9$$

Γ4. Να δείξετε ότι

$$(x+1)\cdot f(x^2)>f(x^3)+x\cdot f(x),\ \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty)$$

Μονάδες (7+8+5+5)=25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x-1}{\ln x-x}, & \text{αν } x>0 \\ 1, & \text{αν } x=0 \end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

Δ2. Να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 0 και στα σημεία α, β, με $0<\alpha<1<\beta$ τοπικά ακρότατα.

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1-\beta}\le f(x)\le\frac{1}{1-\alpha} \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Δ4. **α.** Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $M(1,1)$.

β. Να αποδείξετε ότι η C_f είναι κάτω από την ευθεία (ε) στο διάστημα $(0,1)$ και πάνω από την ευθεία (ε) στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Δ5. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx>\sqrt{2}-1.$$

Μονάδες [2+6+6+(2+4)+5]=25