

## ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

11. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

12. Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Πότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ ;

13. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη».

- α.** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή. **Μονάδα 1**  
**β.** Να αποδείξετε τον χαρακτηρισμό σας στο ερώτημα **α**. **Μονάδες 4**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς **λάθος** είναι ο:

- A.** η  $g$  είναι συνεχής στο 2  
**B.** η  $f$  είναι συνεχής στο 1  
**Γ.** η  $g$  έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής  
**Δ.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

14. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν ισχύει  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , τότε σε κάθε περίπτωση ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

β. Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a \in \Delta$ , ισχύει

$$\left( \int_x^a f(t) dt \right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

γ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

δ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ .

ε. Αν  $0 < \alpha < 1$ , ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ .

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{1-x}, \quad x \leq 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x, \quad x > 0$$

B1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να δείξετε ότι η αντίστροφη  $f^{-1}$  είναι

$$f^{-1}(x) = 1 - (x-1)^3, \quad x \geq 1$$

B2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

B3. Να ορίσετε τη συνάρτηση

$$h = f - g$$

και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B4. Να λύσετε στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  την εξίσωση

$$\ln(\varepsilon\phi x) = \sqrt[3]{1-\eta\mu x} - \sqrt[3]{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

Μονάδες (6+6+6+7)=25

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{ax}, x \in \mathbb{R}, \text{ με } a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

και ότι η ευθεία  $(\varepsilon): y = ex$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x^2) - g(x)}{x - 1} = 1,$
- η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1, 0)$  και
- $g'(x) + xg''(x) = 0,$  για κάθε  $x \in (0, +\infty).$

Γ1. Να αποδείξετε ότι

$$a = 1.$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι

$$g(x) = \ln x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Γ3. Έστω  $A(x, f(x))$  και  $B(x, g(x))$  δύο τυχαία σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  αντίστοιχα με κοινή τετμημένη.

Να αποδείξετε ότι:

α. Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων  $A$  και  $B$  δίνεται από τη συνάρτηση

$$d(x) = e^x - \ln x, x \in (0, +\infty).$$

β. Υπάρχει ένα ακριβώς

$$x_0 > 0, \text{ με } x_0 \in (0, 1),$$

για το οποίο η απόσταση  $(AB)$  γίνεται ελάχιστη.

γ.  $(AB) > 2.$

Μονάδες  $[4 + 5 + (4 + 6 + 6)] = 25$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) + f^2(x) = 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $f(\mathbb{R}) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  και
- $f(0) = 0$ .

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να βρείτε

τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ .

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς

την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(x) - 3x}.$$

Δ5. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = 3f(x) - f^3(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από

- την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  τον άξονα  $x'x$  και
- την ευθεία  $x = \lambda$ ,  $\lambda > 0$ .

β. Να αποδείξετε ότι  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \frac{3}{2}$ .

Μονάδες  $[4+4+4+4+(5+4)]=25$