1

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ

και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Πότε μια συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$ λέγεται "1-1";

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής.** Μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. Μονάδες 3

Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(0)=g(0)+2$, τότε για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει:

Α. $f(x)=g(x)-2$ **Β.** $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx=4$

Γ. $f(x) \le g(x)$, $x \in [-1,1]$ **Δ.** Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1,1]$

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=-x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy' και $x'Oy$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι συνεχής στο x_0.

γ. Αν $\alpha>0$ τότε : $\left(\alpha^{x}\right)'=x\cdot\alpha^{x-1}$.

δ. Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

ε. Αν $c>0$, και $\alpha<\beta$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta-\alpha$ και ύψος c.

Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B2. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f,

και

να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$g(x)=|x+2|+|x-2|$$

να αποδείξετε ότι

η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g είναι σταθερή συνάρτηση

και

να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες (5+6+7+7)=25

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}(e^x-1)\cdot\ln x, & x>0\\ \kappa, & x=0\end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=0$.

Γ2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι

η f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$

και

να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $A(1, f(1))$

Γ4. Να αποδείξετε ότι

για κάθε $x>1$,

ισχύει :

$$\frac{e^x-1}{e-1}>\frac{x-1}{\ln x}.$$

Γ5. Να αποδείξετε ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$

για το οποίο ισχύει :

$$e^{\xi}\cdot\ln(e\cdot\xi^{\xi})=1$$

Μονάδες $(5+4+5+5+6)=25$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x},\ x>0.$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών.

Δ2. Να αποδείξετε ότι

η εξίσωση

$$f(x)=\frac{1}{3}$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με

$$0<\rho_1<1<\rho_2$$

και στη συνέχεια ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$

τέτοιο ώστε

$$3f(x_0)=1+f'(x_0).$$

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 xe^{-x}dx$$

και

στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι:

$$\int_1^2 f(x)dx<\frac{2e-3}{e^2}.$$

Δ4. Αν

F είναι μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$,

να αποδειχθεί ότι

για κάθε $x>0$

ισχύει:

$$F(x+1)+F(x+3)<2F(x+2).$$

Μονάδες (6+6+6+7)=25